
**Esercitazioni per il corso di Microonde
2005/2006:**

CENNI DI TEORIA DELL'ERRORE

Ing. Ricci Andrea Simone

INCERTEZZA DI MISURA - Introduzione



Misura

> complesso di *attività* volte alla *valutazione* di una grandezza (*misurando*).

INCERTEZZA DI MISURA - Introduzione

In generale la rappresentazione di un *misurando* \bar{y} si avvale della formalizzazione di uno specifico *modello fisico* rappresentabile attraverso una relazione matematica del tipo:

$$\bar{Y} = f(\bar{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Relazione funzionale}$$

MODELLO DETERMINISTICO del SISTEMA

- > La legge espressa dalla funzione $[f(\)]$ e tutte le componenti della variabile dipendente X_i sono note.

INCERTEZZA DI MISURA - Introduzione

Alla temperatura t_0 , ai terminali di un resistore R_0 il cui valore dipende linearmente da t secondo un coefficiente α si applica una differenza di potenziale V .

La potenza P (*misurando*) dissipata dal resistore alla temperatura t sarà espressa dalla seguente relazione funzionale:

$$P = V^2/R_0[1 + \alpha(t-t_0)]$$

INCERTEZZA DI MISURA – Elementi di Criticità

Aspetti critici di una misura:

- Definizione incompleta del misurando;
- Fattori ambientali;
- Presenza di disturbi (p.es. vibrazioni, rumore elettrico, **interferenza EM**);
- Incertezza nella lettura dello strumento;
- Risoluzione nella lettura del dato fornito dallo strumento (oltre ad errore di *quantizzazione*);
- Approssimazioni nel *metodo* e nella *procedura di misura*.

INCERTEZZA DI MISURA – Concetti base

L'incertezza associata al risultato di una misurazione esprime l'impossibilità di perseguire una conoscenza esatta del misurando.

Possibilità di procedere esclusivamente ad una STIMA del misurando essa stessa ancora dipendente da una molteplicità di fattori:

3. Caratteristiche della strumentazione impiegata, condizioni ambientali, *setup* di misura, esperienza dell'operatore, ecc.;
4. Conoscenza del fenomeno fisico che si sta misurando.

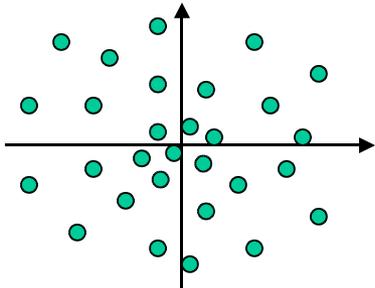
INCERTEZZA DI MISURA - Concetti base

Tipologie di errori possibili:

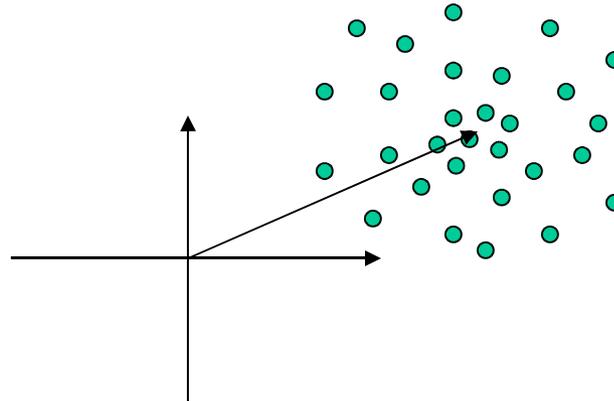
- Errore *casuale* o *statistico* (media nulla)
- Errore *sistematico* (non evidenziato dalla misura)
- Errori di *deriva*.

INCERTEZZA DI MISURA – Effetti

Incertezza > “parametro che caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando”.



a) Incertezza casuale



b) Incertezza sistematica + casuale

Impossibilità di valutare l'errore rispetto al valore vero del *misurando*.

INCERTEZZA DI MISURA - Esempi

- i. Determinazione del periodo di rotazione del piatto di un giradischi.
 - *errore casuale* > tempo di reazione cronometro. Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare il periodo di rotazione.
 - *errore sistematico* > staratura dello strumento (marcia costantemente lento). La ripetizione delle misure non evidenzierà questa sorgente di errore.

INCERTEZZA DI MISURA - Esempi

- i. Misura di una lunghezza con un righello.
 - *errore casuale* > interpolazione tra due tacche della scala. Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare la lunghezza.
 - *errore sistematico* > deformazione del righello. La ripetizione delle misure non evidenzierà questa sorgente di errore.

INCERTEZZA DI MISURA - Esempi

- i. Misura del valore di una resistenza elettrica attraverso impiego di un voltmetro.
 - *errore casuale* > dipendenza del valore misurato dal rumore termico. Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare la lunghezza.
 - *errore sistematico* > presenza di una impedenza di ingresso del voltmetro caratterizzata da un valore finito confrontabile con quello del misurando. La ripetizione delle misure non evidenzierà questa sorgente di errore.

INCERTEZZA DI MISURA – Parametri di Stima sulla *popolazione*

Valore atteso
(*aspettazione*)

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y) dy$$

Varianza
(*momento centrale di ordine 2*)

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 p(y) dy$$

INCERTEZZA DI MISURA – Metodologie di valutazione

Classificazione delle metodologie di valutazione delle incertezze di misura:

- Tipo **A**: ricavate attraverso metodi statistici
- Tipo **B**: altri metodi.

In teoria tutte le incertezze di misura di tipo statistico potrebbero essere ricavate attraverso indagini ripetute di tipo A.

INCERTEZZA DI MISURA – Tipo A

Parametri di Stima sul *campione*

Media aritmetica sul campione

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Deviazione standard o *deviazione quadratica media* (RMS)
o *Scarto tipo* sul campione

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

INCERTEZZA DI MISURA – Tipo A

Parametri di Stima sul *campione*

Supponiamo di aver misurato N valori, x_1, \dots, x_N , della grandezza x .
La σ_x rappresenta l'incertezza media delle singole misure.

La miglior stima di x , x_{best} , è il suo valor medio secondo la definizione precedente.

L'incertezza nel risultato finale, x_{best} , sarà espressa dalla >

Deviazione standard della media

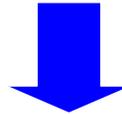
$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

INCERTEZZA DI MISURA – Tipo A

Parametri di Stima sul *campione*

Importante:

L'aumento di N non riduce gli errori sistematici



Quindi per aumentare la precisione di una misura è necessario cambiare il metodo di misura e/o l'apparato sperimentale.

INCERTEZZA DI MISURA - Propagazione

Propagazione degli errori massimi

$$\Delta y = \sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Propagazione degli errori statistici

$$\sigma^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 \sigma^2(x_2) + \dots$$

INCERTEZZA DI MISURA – Esempio

Tipo A

Supponiamo di aver ottenuto i seguenti valori dalla misura di una grandezza:

71, 72, 73, 72, 71

Qual è la miglior stima di x ?

La miglior stima, x_{best} , di x è la media:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

$$x_{best} = \bar{x} = \frac{71 + 72 + 73 + 72 + 71}{5} = 71.8$$

INCERTEZZA DI MISURA – Esempio

Tipo A

Residuo o Deviazione

>

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

Il residuo indica di quanto il valore x_i misurato differisce dalla media.

Numero della prova, i	Valore Misurato, x_i	Deviazione d_i
1	71	-0.8
2	72	0.2
3	73	1.2
4	72	0.2
5	71	-0.8
	$\bar{x} = 71.8$	$\bar{d} = 0$



INCERTEZZA DI MISURA – Esempio

Tipo A

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Numero della prova, i	Valore Misurato, x_i	Deviazione d_i	d_i^2
1	71	-0.8	0.64
2	72	0.2	0.04
3	73	1.2	1.44
4	72	0.2	0.04
5	71	-0.8	0.64
	$\bar{x} = 71.8$	$\bar{d} = 0$	$\sum d_i^2 = 2.80$



$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2.80}{5}} \approx 0.7$$

INCERTEZZA DI MISURA – Tipo B

Parametri di Stima

Si procede ad una valutazione dei *parametri di stima* sulla base di un giudizio scientifico basato su tutte le informazioni disponibili sulla possibile variabilità del *misurando*:

- Dati misurazioni precedenti
- Specifiche tecniche fornite dal costruttore
- Dati forniti da certificati di taratura
- Incertezze ricavate attraverso consultazione di documentazione scientifica.

Richiesta una conoscenza approfondita del fenomeno.

INCERTEZZA DI MISURA – Esempi

Tipo B

Un certificato di taratura stabilisce che la massa m di un campione di massa di acciaio inossidabile con valore nominale di 1 kg è di 1000,000325 g e che l'incertezza tipo di questo valore è 240 μg al livello di 3 scarti tipo. L'incertezza tipo del campione di massa è allora semplicemente

$$u(m_s) = 240/(3)^{1/2} = 138.56 \mu\text{g}$$

INCERTEZZA DI MISURA – Esempio

ESEMPIO: Determinare l'incertezza sulla potenza elettrica $P = R \times I^2$ dissipata da una resistenza di 100Ω percorsa da una corrente di 1 A , sapendo che l'incertezza di misura sulla resistenza è pari a $\Delta R\% = \pm 0,5\%$ e che l'incertezza di misura sulla corrente è $\Delta I\% = \pm 1,5\%$

$$P = R \times I^2 = 100 \times 1^2 = 100 \text{ W}$$

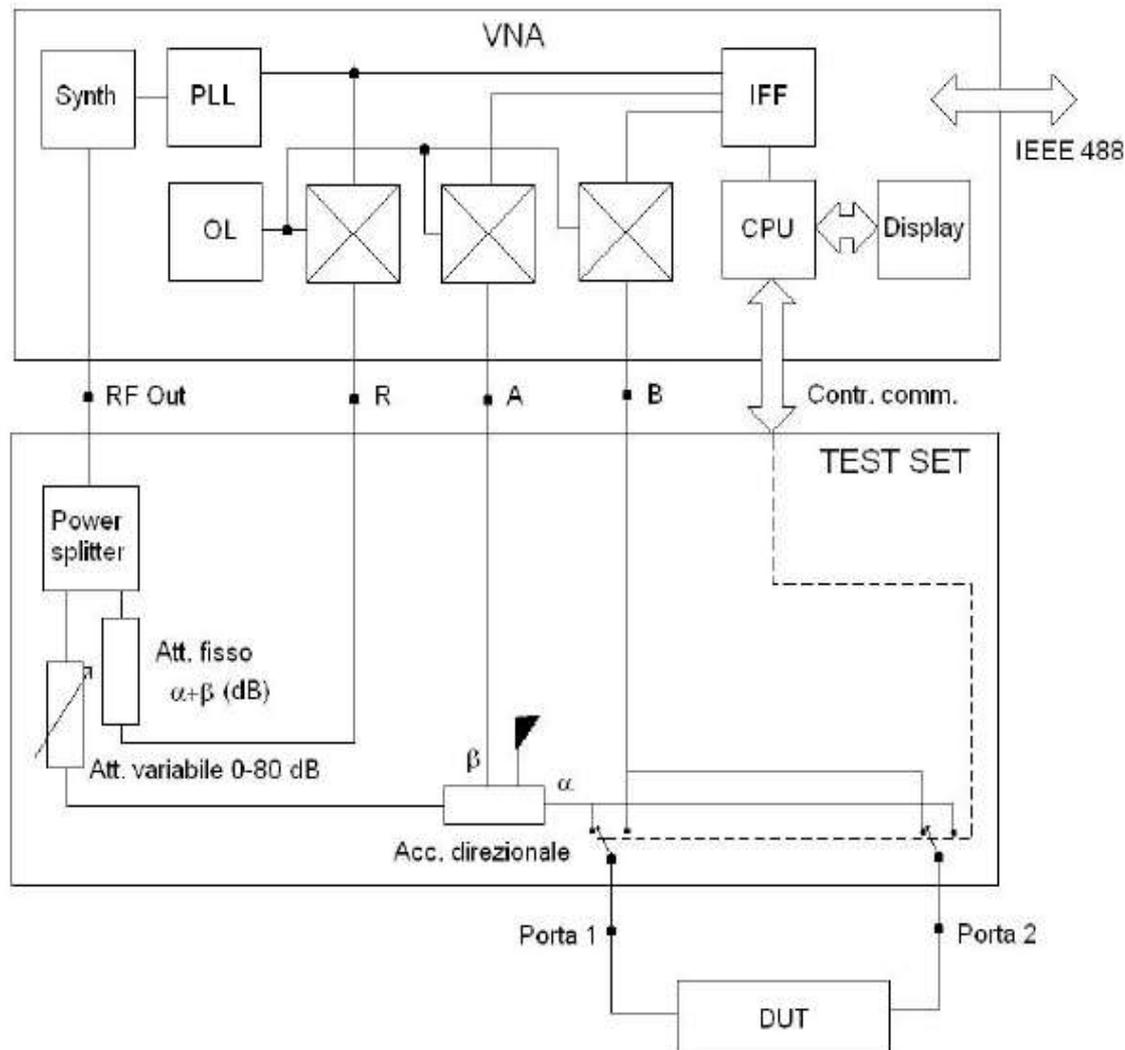
Utilizzando la legge di propagazione degli errori massimi si ottiene:

$$\Delta P\% \cong \frac{100}{P} \left(\left| \frac{\partial P}{\partial R} \right| \Delta R + \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| \Delta I \right) = \dots = \Delta R\% + 2\Delta I\% = \pm 0,5\% \pm 2 \cdot 1,5\% = \pm 3,5\%$$

STRUMENTAZIONE: Analizzatore di Reti.

STRUMENTAZIONE– Analizzatore di reti

Schema a blocchi



STRUMENTAZIONE – Analizzatore di reti

Errori Casuali (Random)

Sono causati da rumori strumentali e ripetibilità delle connessioni.

Essendo variabili casualmente con il tempo non si possono rimuovere con la calibrazione.

Si possono ridurre aumentando il livello di potenza della sorgente, stringendo la banda IF, mediando direttamente la traccia.

STRUMENTAZIONE - Rumore elettronico

Rumore **JOHNSON** (*termico*) > fluttuazione casuale della tensione che si verifica ai capi dei componenti passivi.

Caratteristiche:

4. Gaussiano

5. Bianco fino a frequenze intorno a 10^{13} Hz.

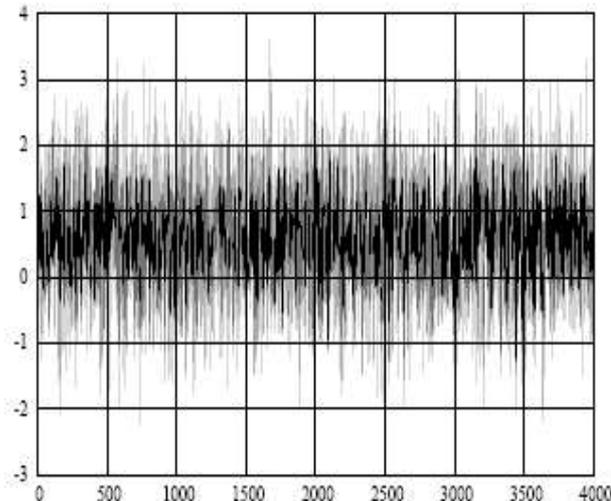
6. d.s.p. > $v_n^2(\nu) = 4RKT$

7. Varianza > $\overline{v_n^2} = \int_0^{\Delta\nu} v_n^2(\nu) d\nu = 4RKT \Delta\nu.$

STRUMENTAZIONE - Rumore elettronico

Esempi di portata di incertezza di misura in caso di rumore termico:

- Con $R = 1 \text{ K}\Omega$, $T = 290 \text{ K}$, $\Delta\nu = 5 \text{ MHz}$ la fluttuazione della tensione (scarto quadratico medio) è $\sqrt{v_n^2} = 9 \text{ }\mu\text{V}$.
- A 20° C , $\sqrt{4KRT} = 1.27 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{R} \text{ V} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$. Quindi, con $R = 10 \text{ K}\Omega$ e $\Delta\nu = 10 \text{ KHz}$, si ha $\sqrt{v_n^2} = 1.3 \text{ }\mu\text{V}$.



STRUMENTAZIONE - Rumore elettronico

Rumore di **GENERAZIONE** e **RICOMBINAZIONE** > caratteristico dei semiconduttori è dovuto alle fluttuazioni casuali sul tasso di generazione termica delle coppie elettrone-lacuna (può essere confuso con il rumore SHOT).

Caratteristiche:

5. D.s.p. >

$$S(\omega) = \frac{t}{1 + \omega^2 t^2}$$

STRUMENTAZIONE - Rumore elettronico

Rumore *ROSA* o *FLICKER NOISE* > anch'esso legato alla presenza di buche di potenziale, ma fisicamente ancora da studiare.

Caratteristiche:

4. D.s.p. $S(\nu) = \frac{k}{\nu^\alpha}$
5. Costante per ottave in frequenza in termini di energia
6. Importante in molte tipologie di fenomeni (es.: acustica)
7. Non stazionario

STRUMENTAZIONE - Rumore elettronico

Rumore **SHOT** (*rumore di granulosità*) > rumore dovuto alla natura corpuscolare della materia. Si verifica in prossimità di barriere di potenziale (tubi a vuoto, giunzioni).

Caratteristiche:

3. Gaussiano

4. Bianco in prima approssimazione.

5. d.s.p. >

$$S(\nu) = 2qI \operatorname{sinc}^2(2\pi\nu\Delta t/2)$$

(approssimato)

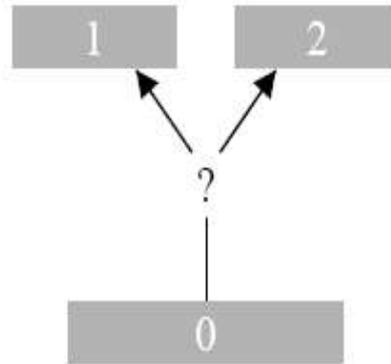
6. Varianza >

$$\overline{i_n^2} = 2qI\Delta\nu$$

7. In termini relativi pesa di più per componenti di piccola intensità.

STRUMENTAZIONE - Rumore elettronico

Rumore di *RIPARTIZIONE* > dovuto alla presenza di diramazioni nel percorso dei portatori di carica.



Caratteristiche statistiche simili al rumore SHOT

3. D.s.p. >
$$S_1(\nu) = \left(\frac{\overline{i_1}}{\overline{i}} \right)^2 2q\overline{i} + 2q(\overline{i_1}|\overline{i_2}) \neq S_2(\nu)$$

STRUMENTAZIONE – Analizzatore di reti

Errori Sistemati

In generale, gli *errori sistematici* sono causati da imperfezioni di *setup* e *strumentazione*. Sono difficili da individuare e non possono essere studiati attraverso un approccio *statistico* alla misura.

Tuttavia, possono essere “matematicamente corretti” attraverso le seguenti azioni:

- Una corretta operazione di “zero”
- Periodicità della taratura
- Effettuazione di una corretta *procedura di calibrazione*
- Uso di strumentazione di qualità

STRUMENTAZIONE – Analizzatore di reti

Errori Sistemati

Per quanto riguarda il funzionamento dell'analizzatore di reti, gli *errori sistemati* possono essere catalogati in sei tipologie:

3. *Direttività*
4. *Isolamento*
5. *Disadattamento sorgente*
6. *Disadattamento carico*
7. *Risposta in frequenza in RX*
8. *Risposta in frequenza in TX*

STRUMENTAZIONE – Analizzatore di reti

Strategie di calibrazione

Tra alcune differenti strategie possibili, ci occuperemo di analizzare la *strategia di calibrazione* individuata dall'acronimo:

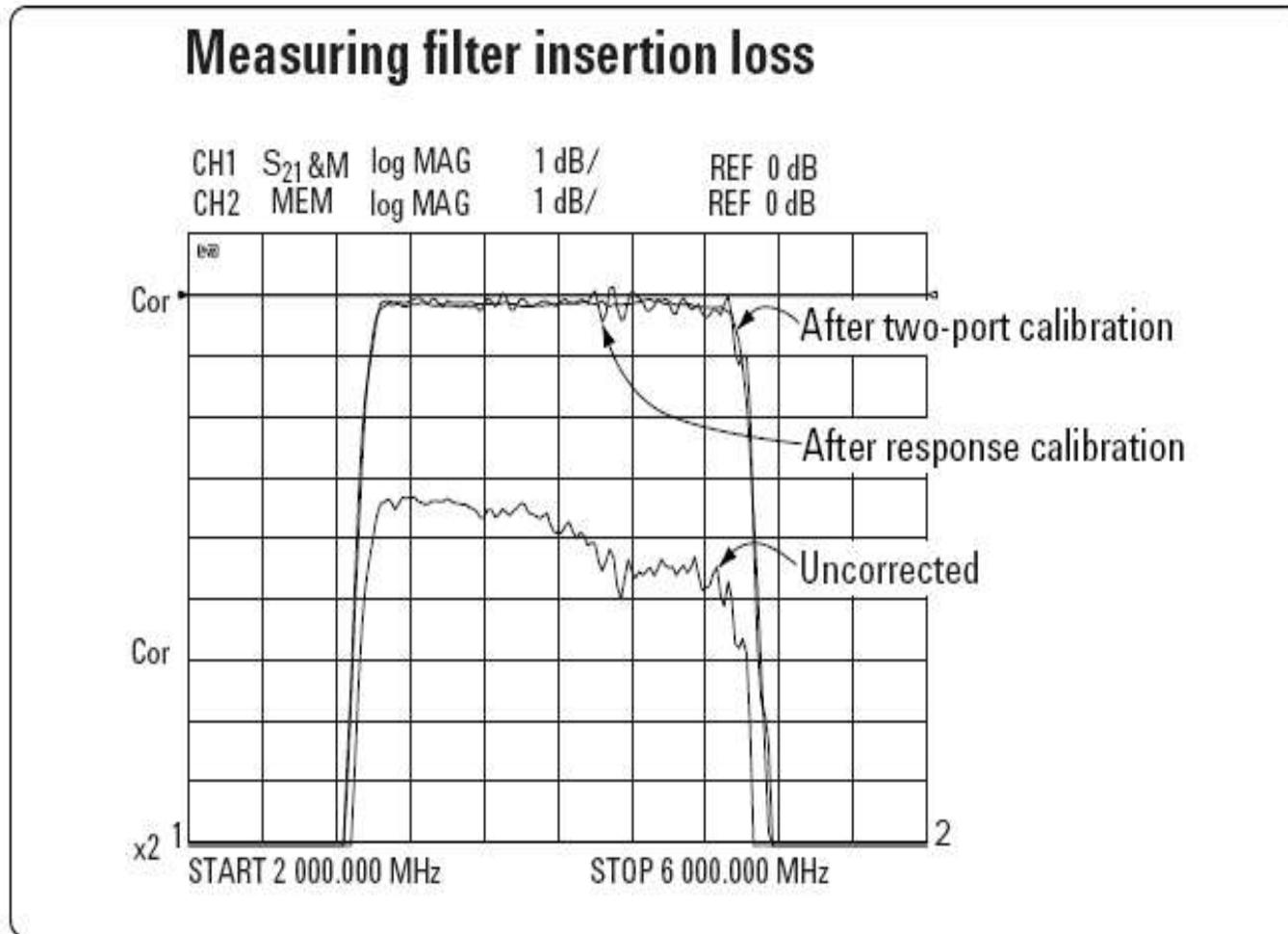
SOLT \Rightarrow *S* = *Short*; *O* = *Open*; *L* = *Load*; *T* = *Through*

dal nome dei *componenti campione* utilizzati per la rivelazione degli *errori sistematici* eventualmente presenti nella misura.

Si tratta della strategia più usata in particolare in presenza di sistemi *coassiali*.

STRUMENTAZIONE – Analizzatore di reti

Strategie di calibrazione



STRUMENTAZIONE – Analizzatore di reti

Strategie di calibrazione

$$S_{11a} = \frac{\left(\frac{S_{11m} \cdot E_D}{E_{RT}}\right) \left(1 + \frac{S_{22m} \cdot E_{D'}}{E_{RT'}} E_{S'}\right) \cdot E_L \left(\frac{S_{21m} \cdot E_X}{E_{TT}}\right) \left(\frac{S_{12m} \cdot E_{X'}}{E_{TT'}}\right)}{\left(1 + \frac{S_{11m} \cdot E_D}{E_{RT}} E_S\right) \left(1 + \frac{S_{22m} \cdot E_{D'}}{E_{RT'}} E_{S'}\right) \cdot E_L' E_L \left(\frac{S_{21m} \cdot E_X}{E_{TT}}\right) \left(\frac{S_{12m} \cdot E_{X'}}{E_{TT'}}\right)}$$

$$S_{21a} = \frac{\left(\frac{S_{21m} \cdot E_X}{E_{TT}}\right) \left(1 + \frac{S_{22m} \cdot E_{D'}}{E_{RT'}} (E_{S'} \cdot E_L)\right)}{\left(1 + \frac{S_{11m} \cdot E_D}{E_{RT}} E_S\right) \left(1 + \frac{S_{22m} \cdot E_{D'}}{E_{RT'}} E_{S'}\right) \cdot E_L' E_L \left(\frac{S_{21m} \cdot E_X}{E_{TT}}\right) \left(\frac{S_{12m} \cdot E_{X'}}{E_{TT'}}\right)}$$

$$S_{12a} = \frac{\left(\frac{S_{12m} \cdot E_{X'}}{E_{TT'}}\right) \left(1 + \frac{S_{11m} \cdot E_D}{E_{RT}} (E_S \cdot E_L')\right)}{\left(1 + \frac{S_{11m} \cdot E_D}{E_{RT}} E_S\right) \left(1 + \frac{S_{22m} \cdot E_{D'}}{E_{RT'}} E_{S'}\right) \cdot E_L' E_L \left(\frac{S_{21m} \cdot E_X}{E_{TT}}\right) \left(\frac{S_{12m} \cdot E_{X'}}{E_{TT'}}\right)}$$

$$S_{22a} = \frac{\left(\frac{S_{22m} \cdot E_{D'}}{E_{RT'}}\right) \left(1 + \frac{S_{11m} \cdot E_D}{E_{RT}} E_S\right) \cdot E_L' \left(\frac{S_{21m} \cdot E_X}{E_{TT}}\right) \left(\frac{S_{12m} \cdot E_{X'}}{E_{TT'}}\right)}{\left(1 + \frac{S_{11m} \cdot E_D}{E_{RT}} E_S\right) \left(1 + \frac{S_{22m} \cdot E_{D'}}{E_{RT'}} E_{S'}\right) \cdot E_L' E_L \left(\frac{S_{21m} \cdot E_X}{E_{TT}}\right) \left(\frac{S_{12m} \cdot E_{X'}}{E_{TT'}}\right)}$$